

COMPITI E SUDDIVISIONE FONDI TRA LE UNITÀ DI RICERCA  
prot. 20088SBBH9

<b>Coordinatore Scientifico</b>	(CESSATO DAL SERVIZIO) Paolo TOTH
<b>Ateneo</b>	Università degli Studi di BOLOGNA
<b>Titolo della Ricerca</b>	Modelli e Algoritmi per Problemi di Ottimizzazione Combinatoria nella Gestione di Sistemi di Trasporto
<b>Finanziamento assegnato</b>	Euro 51.125
<b>Durata</b>	24 Mesi
<b>Responsabile attuale</b>	Daniele VIGO

**Obiettivo della Ricerca  
(come da progetto presentato)**

Obiettivo del programma di ricerca è lo sviluppo di metodologie matematiche ed algoritmiche, nonché la realizzazione di programmi di calcolo efficienti, per la soluzione esatta e/o euristica di una serie di problemi legati alla definizione di percorsi ottimi per veicoli ed al loro caricamento, problemi questi di notevole rilevanza, sia dal punto di vista scientifico-metodologico che dal punto di vista applicativo, nel campo della logistica e dei trasporti.

Nei problemi di instradamento di veicoli (Vehicle Routing Problem, VRP) occorre definire i percorsi ottimali di una flotta di veicoli localizzati in uno o più depositi, secondo diversi possibili criteri (quali il minimo costo, la minima durata, la minima lunghezza) nel rispetto di svariati vincoli che sorgono nei diversi contesti applicativi. Oltre al classico problema del Commesso Viaggiatore (Traveling Salesman Problem, TSP), che costituisce la base teorica ed algoritmica per la grande maggioranza dei problemi di questo settore, lo sforzo maggiore di ricerca verrà impiegato nello studio di algoritmi in grado di risolvere una serie di casi di notevole rilevanza pratica. Oltre agli ovvi vincoli legati al rispetto delle capacità dei veicoli utilizzati, verranno infatti considerati:

- vincoli sulle finestre temporali all'interno delle quali occorre effettuare le visite ai clienti;
- casi in cui i veicoli utilizzati hanno caratteristiche diverse (ad esempio capacità e costi di utilizzo diversi);
- casi in cui i veicoli possono effettuare più viaggi in un intervallo temporale prefissato;
- caso in cui un cliente possa essere visitato da più di un veicolo e la sua domanda suddivisa fra i diversi veicoli;
- caso in cui le consegne da un deposito centrale ai clienti sono effettuate mediante due livelli di distribuzione utilizzando depositi intermedi, detti satelliti.

In numerosi problemi pratici di instradamento, il caricamento dei veicoli deve essere esplicitamente considerato ed inoltre devono essere considerati i costi ed i tempi necessari ad eventuali operazioni di smistamento del carico del veicolo durante il servizio ai clienti. In queste situazioni l'ordine di visita ai clienti e' influenzato dall'effettiva possibilità di caricare il veicolo con gli oggetti da consegnare nell'ordine specificato e dai tempi e costi necessari per le operazioni di smistamento. Verrà considerato il problema risultante, denominato Vehicle Routing with Load Handling Constraints, anche nel caso di un singolo veicolo (Traveling Salesman Problem with Load Handling Constraints).

Sarà considerato inoltre il problema del Generalized Traveling Salesman Problem e del Generalized Vehicle Routing problem, varianti dei problemi classici di TSP e VRP in cui l'insieme dei vertici e' partizionato in cluster ed ogni cluster deve essere visitato una ed una sola volta.

I problemi di instradamento sopra elencati sono di tipo deterministico in quanto tutti i dati del problema sono costanti e noti a priori. Diverse applicazioni reali sono caratterizzate dall'incertezza in quanto, ad esempio, la domanda associata ai clienti può essere molto variabile e non nota a priori. Scopo del progetto è perciò anche quello di affrontare lo studio di questo tipo di problemi, denominati problemi stocastici di instradamento.

Il progetto considererà anche problemi di packing che si riscontrano nei sistemi di trasporto reali. In questi problemi di packing (Bin Packing e Knapsack) deve essere determinato il caricamento ottimo dei veicoli utilizzati. I molti problemi di packing riscontrabili in questo contesto differiscono per la funzione obiettivo e per i vincoli. Generalmente, l'obiettivo è la minimizzazione del numero di veicoli richiesti per servire tutti i clienti, minimizzando lo spazio occupato o il costo complessivo. In quasi tutte le applicazioni pratiche sono presenti anche dei vincoli aggiuntivi che riguardano le capacità dei veicoli utilizzati, la sequenza con cui saranno effettuate le operazioni di caricamento e scaricamento e il tempo richiesto per eseguire tali operazioni. Tra tutti i possibili problemi di packing la nostra ricerca considererà i seguenti problemi di notevole interesse:

- il Two-Dimensional Strip Packing (2SPP) e il Two-Dimensional Bin Packing (2BPP), in cui gli oggetti (e.g., pallets, gabbie, etc.) devono essere collocati direttamente sul piano di carico del mezzo minimizzando la lunghezza del piano di carico utilizzato o il numero di veicoli utilizzati;
- il Variable Size Bin Packing monodimensionale e bidimensionale (1VSBPP e 2VSBPP), che trova numerose applicazioni pratiche e può essere anche utilizzato per derivare dei validi lower bound o delle disuguaglianze valide per il VRP;
- il Two-Constraint Bin-Packing (2CBPP), dove una tipica applicazione è il caricamento di merci di piccole dimensioni, ciascuna delle quali con un peso e un volume noto, in vani di carico ognuno dei quali è soggetto a vincoli di peso e volume. In queste situazioni non è necessario definire il layout di carico tridimensionale, ma è solamente richiesto il soddisfacimento di entrambi i vincoli di capacità.

La ricerca considererà anche l'interazione esistente tra le componenti "routing" e "loading", considerando, oltre ai problemi di packing classici, gli aspetti riguardanti il caricamento dei veicoli e gli aspetti relativi alla movimentazione delle merci presso i clienti ("Vehicle Routing Problem with Handling", VRPH). In particolare, il VRPH ha un considerevole interesse pratico e non è stato ancora considerato in letteratura.

Molti problemi di instradamento e caricamento di utilità pratica possono essere formulati come problemi di Programmazione Intera Mista (MIP).

Verranno considerati in particolare i seguenti problemi:

- studio di nuove famiglie di piani di taglio generici per problemi MIP;
- formulazioni estese di problemi MIP;
- integrazione tra le tecniche di Constraint Programming e quelle di Programmazione Matematica.

I membri delle cinque Unità di Ricerca del progetto hanno esperienza pluriennale di collaborazione nello studio di problematiche di ottimizzazione, ed in particolare di temi strettamente connessi ai problemi oggetto del presente progetto. Le ricerche da loro svolte sono state pubblicate sulle principali riviste internazionali del settore, e molti dei membri delle Unità godono di notevole visibilità scientifica internazionale.

Per tutti i problemi considerati, le diverse Unità adotteranno una metodologia comune, basata essenzialmente su due fasi di sviluppo. In una prima fase verrà analizzata la letteratura internazionale relativa agli specifici problemi affrontati e, partendo dallo stato dell'arte del settore, verranno sviluppati modelli matematici (generalmente di Programmazione Intera Mista), verranno proposti rilassamenti dei modelli che possano consentire il calcolo efficiente di bound efficaci sul valore della soluzione ottima, verranno definite tecniche di riduzione ed algoritmi esatti ed euristici. Poiché tutti i problemi considerati appartengono alla classe dei problemi NP-completi, gli algoritmi esatti proposti saranno di tipo enumerativo. Si prevede in tale ambito di utilizzare tecniche quali branch-and-bound, programmazione dinamica, branch-and-cut, branch-and-price, constraint programming e integrazioni tra tali tecniche. Per quanto riguarda lo studio di algoritmi euristici, si utilizzeranno sia tecniche di tipo costruttivo e di ricerca locale che tecniche metaeuristiche. Successivamente, i principali algoritmi ottenuti verranno implementati in codici di calcolo che potranno costituire la base per pacchetti software prototipo. L'indispensabile analisi dell'efficienza di tali prodotti verrà effettuata mediante sperimentazione computazionale su diverse tipologie di problemi test: problemi della letteratura, problemi a generazione casuale e problemi reali provenienti dal mondo industriale.

## **Stato dell'arte nel campo (come da progetto presentato)**

Scopo della ricerca è la realizzazione di modelli matematici ed algoritmi esatti ed euristici per la soluzione di alcuni importanti problemi di ottimizzazione per l'instradamento ("routing") e il caricamento ("packing") dei veicoli che si incontrano nella pianificazione e nella gestione operativa di sistemi logistici e di trasporto merci. Tutti i problemi considerati appartengono alla classe dei problemi NP-completi e sono di grande rilevanza dal punto di vista sia metodologico che applicativo.

I problemi di instradamento ("Vehicle Routing Problem", VRP) riguardano la pianificazione ottimale dei viaggi di una flotta di veicoli localizzati presso uno o più depositi in modo da servire un insieme di clienti minimizzando il costo globale di trasporto. I problemi reali di VRP sono caratterizzati da numerosi vincoli di natura complessa e richiedono frequentemente un coordinamento tra i gestori dei depositi ed i clienti. I principali metodi esatti ed euristici utilizzati in letteratura per il TSP ed il VRP sono illustrati nei recenti volumi [Gutin e Punnen, 2002, Toth e Vigo, 2002, Vigo, 2002, Vigo, Toth e Mingozzi, 2007] ed in [Cordeau, Laporte, Savelsbergh e Vigo, 2007] e [Baldacci, Toth e Vigo, 2008]. Recentemente, [Baldacci, Christofides e Mingozzi, 2008] e [Baldacci e Mingozzi, 2008] hanno presentato un metodo esatto per il Capacitated VRP e per l'Heterogeneous VRP che si basano sulla formulazione set partitioning con l'aggiunta di disuguaglianze valide, quali le clique inequalities e i capacity constraints.

Problemi di instradamento di grande interesse che si intendono approfondire in questa ricerca sono il classico problema del commesso viaggiatore (TSP) e del "Capacitated VRP" ed alcune loro importanti estensioni: finestre temporali, flotta di veicoli eterogenea, viaggi multipli per uno stesso veicolo, etc. In particolare, in questo progetto di ricerca considereremo i seguenti problemi di VRP: Open VRP, Split Delivery Vehicle Routing Problem (SDVRP), Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Time Windows, Multi-Trip Vehicle Routing Problem (MTVRP) e Two-echelon Vehicle Routing Problem (2E-VRP). Per questi problemi non sono noti metodi esatti ma solo algoritmi euristici. Euristici per MTVRP sono stati proposti in [Olivera e Viera, 2007] e [Alonso et al., 2007]. Metodi euristici per 2E-VRP e applicazioni dei medesimi ai sistemi di distribuzione e al City Logistics sono descritti in [Crainic et al., 2004]. Algoritmi esatti ed euristici per l'OVRP sono stati presentati in [Letchford, Lysgaard e Eglese, 2007], [Tarantilis, Ioannou, Kiranoudis e Prastacos, 2005], [Fu, Eglese e Li, 2005], [Li, Golden e Wasil, 2007], [Derigs e Reuter, 2008], [Fleszar e Osman, 2009]. Algoritmi di ricerca locale basati sulla soluzione di un modello di Programmazione Lineare Intera per il Capacitated VRP sono stati proposti in [Toth e Tramontani, 2008].

Il problema del commesso viaggiatore ("Traveling Salesman Problem", TSP) è uno dei problemi più studiati nell'ambito dell'ottimizzazione combinatoria e una classica applicazione di routing. In tale problema si richiede di determinare il viaggio di costo minimo che parta e ritorni al deposito e visiti tutti i clienti. Nel classico Capacitated VRP (CVRP) ogni cliente ha associata una domanda, tutti i veicoli hanno la stessa capacità, e si richiede di determinare un insieme di viaggi per i veicoli a disposizione di costo complessivo minimo, in modo che ogni veicolo esegua un solo viaggio, tutti i clienti siano visitati da un unico viaggio, ciascun viaggio parta e ritorni al deposito e visiti un insieme di clienti la cui domanda complessiva sia non superiore alla capacità del veicolo. Il problema "Heterogeneous Vehicle Routing" (HVRP) prevede la presenza di una flotta di veicoli eterogenei composta da tipi di veicoli differenti, per ciascuno dei quali è specificata la capacità, la disponibilità presso il deposito ed il costo fisso di utilizzazione. Inoltre, il costo di percorrenza di ciascun arco dipende dal tipo di veicolo. Il problema "Multi-Trip VRP" (MTVRP) costituisce la variante del VRP in cui ogni veicolo può effettuare più di un viaggio nel corso della giornata lavorativa entro un intervallo temporale di lavoro prefissato. I singoli viaggi svolti dai veicoli devono quindi essere aggregati in giornate lavorative di durata massima prefissata minimizzando una funzione costo globale che tiene conto dei veicoli utilizzati e della distanza percorsa. Per HVRP con finestre temporali e per MTVRP sono noti unicamente algoritmi euristici.

Il problema del Commesso Viaggiatore Generalizzato (GTSP) e del Vehicle Routing Generalizzato (GVRP) sono le varianti dei classici TSP e CVRP in cui l'insieme dei vertici del grafo è partizionato in cluster e si devono determinare circuiti di costo minimo passanti per uno dei vertici di ciascun cluster. Algoritmi esatti ed euristici per GTSP sono stati proposti in [Fischetti et al., 1997], [Snyder, Daskin, 2006], [Silberholz, Golden, 2007].

Per tutti questi problemi, sia nel caso di matrice delle distanze simmetrica che asimmetrica, è di grande rilevanza l'individuazione di soluzioni euristiche di buona qualità e possibilmente di qualità garantita.

I problemi di caricamento ed impaccamento multi-dimensionale riguardano la sistemazione ottimale di oggetti in contenitori multi-dimensionali (tipicamente, bi- o tri-dimensionali) e sono stati studiati a partire dagli anni '60, dato il loro grande interesse applicativo. Data l'intrinseca complessità di questi problemi, l'attenzione è stata principalmente rivolta allo sviluppo di algoritmi euristici, e solo recentemente sono stati introdotti rilassamenti, algoritmi esatti ed algoritmi approssimati che forniscono garanzie sulla qualità della soluzione prodotta, si veda il survey [Lodi, Martello e Vigo, 2002]. In ogni caso, restano aperte molte questioni teoriche riguardanti questi problemi che avrebbero risvolti applicativi immediati, quali la bontà delle soluzioni prodotte imponendo vincoli ulteriori che semplificano il processo di impaccamento. Problemi di grande interesse che si intendono studiare sono le versioni bidimensionali del "Bin Packing Problem" e del "Knapsack Problem".

Nel Two-Dimensional Bin Packing Problem (2DBPP), nel Two-Dimensional Strip Packing Problem (2DSPP), e nel Two-Dimensional Knapsack Problem (2DKP), gli oggetti sono rettangoli e debbono essere impaccati con le altezze parallele alle altezze dei contenitori. Questi ultimi sono rettangoli finiti nel caso del 2DBPP e del 2DKP, mentre nel caso del 2DSPP vi è un unico contenitore dato da un rettangolo di ampiezza finita ed altezza infinita. L'obiettivo di 2DBPP è di impaccare tutti gli oggetti utilizzando il minimo numero di contenitori, quello di 2DSPP di impaccare tutti gli oggetti nell'unico contenitore minimizzando l'altezza del contenitore utilizzata, e quello di 2DKP di impaccare un sottoinsieme di oggetti di profitto massimo in un unico contenitore finito. Algoritmi euristici per 2DBPP e 2DSPP sono descritti in [Lodi, Martello e Vigo, 1999, Faroe, Pisinger e Zachariasen, 2003, Boschetti e Mingozzi, 2003, Monaci e Toth, 2006].

Il Variable Size Bin Packing Problem (VSBPP) consiste nel collocare un insieme di oggetti in un insieme di contenitori (bin) di differenti dimensioni minimizzando il costo complessivo dei contenitori impiegati o lo spazio inutilizzato complessivo. Per il Variable Size Bin Packing la letteratura propone pochi articoli, e tra questi il più recente e interessante è proposto in [Pisinger e Sigurd, 2005], dove viene descritto un metodo esatto per la versione bidimensionale.

Nel Two-Constraint Bin Packing Problem (2CBPP) e nel Two-Constraint Knapsack Problem (2CKP), ogni oggetto ha due pesi ed ogni contenitore due capacità. Inoltre, in 2CKP ogni oggetto ha anche un profitto. 2CBPP richiede di impaccare tutti gli oggetti nel minimo numero di contenitori, mentre 2CKP richiede di impaccare un sottoinsieme di oggetti di profitto massimo in un unico contenitore. Si veda [Capraro e Toth, 2001] e [Martello e Toth, 2003] per un'illustrazione dello stato dell'arte su questi problemi.

In numerosi problemi pratici di instradamento, il caricamento dei veicoli deve essere esplicitamente considerato a differenza di quanto fatto in problemi base quali il CVRP. Nel "VRP with Load Handling" sono previsti sia il carico che lo scarico di merce presso i clienti e si deve considerare il tempo necessario per il riordino a bordo del carico. Di tali problemi sono state studiate solo alcune varianti in cui l'impatto dell'handling era limitato dall'adozione di politiche rigide di gestione di carichi e scarichi (quali il VRP with LIFO constraint). Il "VRP with Load Handling" non è stato precedentemente affrontato in letteratura.

Altri articoli importanti riguardanti i problemi di instradamento ed impaccamento sono riportati nei "Riferimenti bibliografici".

Il Capacitated Arc Routing Problem (CARP) deterministico è stato originariamente proposto da [Golden e Wong, 1981] ed offre un largo spettro di applicazioni, la maggior parte delle quali riguarda la raccolta dei rifiuti, la distribuzione della posta, la pulizia delle strade, ecc. Una variante molto interessante del CARP, soprattutto per il problema della raccolta dei rifiuti solidi urbani, è data dalla presenza di nodi logistici intermedi. Il problema, noto in letteratura con l'acronimo di CARPIF (Capacitated Arc Routing Problem with Intermediate Facilities), è stato introdotto da [Ghiani et al., 2001] e considerato in [Ghiani et al., 2005]. La variante stocastica del CARPIF è nota in letteratura con l'acronimo SWCP (Stochastic Waste Collection Problem). I lavori che hanno preso in esame la versione stocastica del CARP hanno principalmente affrontato il problema di valutare la robustezza della soluzione del CARP attraverso la generazione casuale di valori della domanda dei clienti sugli spigoli [Fleury et al., 2004, 2005].

Nei problemi di Emergency Optimization si vuole ottimizzare la distribuzione di vaccini ed antivirali alla popolazione urbana ed extra-urbana in caso di pandemia. In tale tipo di applicazione è di cruciale importanza il tempo massimo necessario per raggiungere tutta la popolazione nonché la robustezza del piano di distribuzione che deve prevedere ritorni in punti nei quali la consegna non è stata possibile in prima istanza [Shen, Dessouky, Ordenez, 2007].

Molti problemi di instradamento e caricamento di utilità pratica possono essere formulati come problemi di Programmazione Intera Mista (MIP). Uno degli approcci più usati per affrontare tali problemi consiste nel (ri)formulare la regione ammissibile, allo scopo di descriverne l'involuppo convesso in modo esatto o approssimato [Conforti, Di Summa, Wolsey, 2007].

Pubblicazioni relative alle proprietà teoriche del corner polyhedron sono apparse recentemente a cura di diversi gruppi di autori, fra i quali, [Espinoza 2008] e [Dey e Wolsey, 2008].

Un'altra tecnica interessante è l'operazione di chiusura di Chvátal, sviluppata per la programmazione intera pura e recentemente oggetto di attenzione per la sua possibile estensione a MIP. Tale approccio è stato oggetto di studio da [Conforti Di Summa Eisenbrand e Wolsey, 2006], [Conforti, Gerards e Zambelli, 2007] e [Del Pia e Zambelli, 2007].

I piani di taglio "general purpose" si sono mostrati molto utili nella soluzione di molti problemi formulati come MIP. Recentemente, [Conforti, Di Summa, Eisenbrand e Wolsey, 2006] e [Conforti, Di Summa e Wolsey, 2007] hanno proposto un quadro teorico che generalizza i risultati precedenti, e approfondimenti sono stati presentati in [Conforti e Wolsey, 2007], [Conforti, Wolsey e Zambelli, 2008], [Conforti, Gerard e Zambelli, 2007].

Speed-up computazionali e avanzamenti nelle metodologie di modellazione possono essere ottenuti dall'integrazione dei paradigmi MIP e Constraint Programming (CP), che mostrano proprietà complementari nella modellazione e nella soluzione di problemi di ottimizzazione, come dimostrano recenti lavori in questa direzione [Milano, 2004]. Più recentemente, è stato proposto un più elevato livello di integrazione tra MIP e CP, con i paradigmi "Constraint Integer Programming" [Achterberg, Berthold, Koch, and Wolter, 2008] e "search-infer-and-relax" [Hooker, 2006].

I componenti delle diverse unità di ricerca del progetto si sono occupati per molti anni dello studio e della definizione di algoritmi esatti ed euristici e della realizzazione dei corrispondenti codici di calcolo per la soluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria di grande importanza teorica ed applicativa. Con particolare riferimento alle tematiche che si intendono affrontare nel presente progetto, i componenti delle unità svolgono da molti anni un'intensa attività di ricerca su diversi problemi rilevanti nella decomposizione di problemi complessi, quali i problemi del TSP, del CVRP e delle sue varianti, oltre ai problemi base di impaccamento mono e bi-dimensionale quali il Knapsack Problem ed il Bin Packing Problem.

La rilevanza e la qualità dell'attività scientifica dei componenti delle unità di ricerca è testimoniata dal punto di vista metodologico dal gran numero di pubblicazioni scientifiche apparse sulle più prestigiose riviste internazionali del settore ed in libri pubblicati da importanti case editrici europee e nordamericane (si veda la lista di pubblicazioni allegata), e, dal punto di vista applicativo, da una intensa attività di collaborazione con enti ed aziende (ad esempio le Ferrovie dello Stato e numerose aziende di trasporto pubblico e di distribuzione) per la soluzione di problemi di ottimizzazione di importante rilevanza pratica.

Nel corso degli anni le attività di ricerca dei componenti delle varie unità sono state spesso svolte in collaborazione con ricercatori delle altre unità del progetto, e con importanti Università straniere. Inoltre i membri delle unità sono coinvolti in numerose organizzazioni e gruppi di ricerca internazionali, hanno partecipato, spesso in qualità di coordinatore, ad un gran numero di progetti di ricerca nazionali ed internazionali (finanziati da MIUR, CNR, Unione Europea, Nato, industrie locali e nazionali, ...), e fanno parte dei Comitati di Redazione di importanti riviste internazionali nelle aree della Ricerca Operativa e della Programmazione Matematica.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Per ragioni di spazio l'elenco dei riferimenti bibliografici è stato qui omissso. Si rimanda per le referenze specifiche ai modelli B delle diverse unità.

## Criteri di verificabilità (come da progetto presentato)

#### VALUTAZIONE DELLA FASI 1, 2 e 3

La valutazione dei risultati conseguiti nelle Fase 1 ( rassegna della letteratura), Fase 2 (definizione dei modelli matematici e messa a punto degli algoritmi) e 3 (implementazione dei codici di calcolo e validazione preliminare), che, si ricorda, hanno contenuto prevalentemente metodologico ed algoritmico, potrà essere effettuata mediante verifica di:

- sottomissione a riviste prevalentemente internazionali dei lavori contenenti i risultati conseguiti (rassegne, modelli, bound, algoritmi esatti, approssimati e metaeuristici);
- comunicazioni a convegni e congressi prevalentemente internazionali dei lavori contenenti i risultati conseguiti;
- inserimento in rete via internet dei lavori prodotti.

#### VALUTAZIONE DELLA FASE 4

La valutazione dei risultati conseguiti nella Fase 4, che, si ricorda, hanno contenuto prevalentemente implementativo e di valutazione sperimentale, potrà essere effettuata mediante verifica di:

- ampia comparazione sperimentale delle prestazioni dei codici realizzati (per quanto riguarda sia il tempo di calcolo che la qualità dei risultati ottenuti) con i migliori algoritmi disponibili in letteratura per la soluzione dei problemi considerati. Verranno utilizzate sia istanze test della letteratura che istanze provenienti da problemi reali;
- comunicazioni a convegni e congressi prevalentemente internazionali dei risultati computazionali ottenuti;
- inserimento in rete via internet dei prototipi software relativi agli algoritmi prodotti per i problemi interessati;
- inserimento in rete via internet dei problemi test (benchmark) utilizzati per la sperimentazione computazionale dei codici prodotti;
- distribuzione di rapporti sintetici dei risultati ottenuti agli operatori del trasporto.

#### VALUTAZIONE GLOBALE

Oltre, evidentemente, alla somma dei criteri sopra indicati, la valutazione dei risultati globalmente conseguiti potrà essere effettuata mediante:

- verifica dello stato (revisione, accettazione condizionata o incondizionata) dei lavori contenenti i risultati conseguiti e sottoposti per pubblicazione a riviste prevalentemente internazionali;
- eventuali feedback e commenti da parte di operatori del trasporto in relazione all'utilizzabilità ed all'utilità dei prototipi software prodotti.

## Elenco delle Unità di Ricerca

<b>Sede dell'Unità</b>	Università degli Studi di BOLOGNA ( <b>CESSATO DAL SERVIZIO</b> )
<b>Responsabile Scientifico</b>	Paolo TOTH
<b>Finanziamento assegnato</b>	<b>Euro 13.223</b>

## Compito dell'Unità (come da progetto presentato)

Scopo della ricerca è la definizione di metodologie innovative per la risoluzione dei problemi menzionati precedentemente. In particolare, verranno studiati algoritmi sia per i problemi di instradamento che per quelli di impaccamento e specificamente per le applicazioni ai sistemi di trasporto che richiedono la soluzione di entrambe le componenti. Tali algoritmi saranno poi sperimentati sia su istanze test della letteratura scientifica che su istanze reali fornite da aziende del settore trasporti.

Si intende mettere a punto metodologie algoritmiche per la soluzione dei problemi studiati che consentano da un lato una notevole flessibilità, potendo in tal modo considerare la grande varietà di vincoli operativi che scaturiscono nelle applicazioni reali, e dall'altro una grande efficienza computazionale per consentire il trattamento di istanze di grandi dimensioni e la determinazione di soluzioni in "tempo reale". Particolare importanza riveste quindi lo sviluppo di tecniche basate sulla

decomposizione del problema, sull'individuazione di sottoproblemi ben strutturati e di modelli matematici appropriati e sull'impiego di rilassamenti efficaci.

Per la determinazione di soluzioni approssimate saranno considerate sia procedure costruttive, che eventualmente sfruttino le informazioni ottenute dai rilassamenti, ad esempio algoritmi euristici lagrangiani, sia procedure di tipo metaeuristico basate su tecniche di tipo "tabu search" ed "evolutive" e su approcci di tipo "set covering". Particolare attenzione sarà dedicata allo sviluppo di tecniche per il miglioramento dell'efficienza degli algoritmi che ne permettano l'uso per la soluzione delle istanze di grande dimensione che caratterizzano le applicazioni reali.

Per la determinazione di soluzioni ottime dei problemi trattati, o di particolari sottoproblemi degli stessi, saranno proposti algoritmi di tipo enumerativo basati sulle tecniche "branch-and-bound", "branch-and-cut" e "branch-and-price". Verranno anche studiate dal punto di vista del caso peggiore la qualità dei bound prodotti dai rilassamenti e la qualità delle soluzioni risultanti dalla decomposizione del problema rispetto alla soluzione ottima del problema originale.

Per i problemi di routing saranno considerati algoritmi metaeuristici per la soluzione approssimata del Problema del Commesso Viaggiatore Generalizzato ("Generalized Travelling Salesman Problem", GTSP), variante del classico TSP in cui l'insieme dei vertici del grafo è partizionato in cluster e si deve determinare un circuito di costo minimo passante per uno dei vertici di ciascun cluster.

Altri problemi di routing che si intende affrontare sono quelli caratterizzati da finestre temporali (time windows), particolarmente importanti dal punto di vista delle applicazioni pratiche. In particolare, sarà analizzato il problema noto come "Heterogeneous Vehicle Routing Problem with Time Windows" (HVRPTW) di notevole rilevanza pratica. Per tale problema sono stati presentati in letteratura unicamente algoritmi euristici (si veda Li, Golden e Wasil, 2007). Il problema prevede la presenza di una flotta di veicoli eterogenei composta da  $m$  tipi di veicoli differenti. Per ogni veicolo di tipo  $k$ ,  $m(k)$  esemplari sono disponibili presso il deposito, ognuno avente capacità uguale a  $Q(k)$ . Ad ogni tipo di veicolo è inoltre associato un costo fisso di utilizzo del veicolo pari a  $F(k)$ , rappresentante, ad esempio, il costo di affitto del veicolo oppure il costo di ammortamento. A ogni arco  $(i,j)$  del grafo e per ogni tipo di veicolo  $k$  è associato un costo di instradamento (o di routing) non negativo pari a  $c(i,j,k)$  ed un tempo di attraversamento  $t(i,j)$ . L'HVRPTW, nella versione più generale, consiste nel determinare un insieme di viaggi (o route) ammissibili di costo globale minimo, e tali che: (i) ogni cliente sia visitato da uno ed un solo veicolo durante la sua finestra temporale, (ii) il numero di veicoli di tipo  $k$  utilizzati non ecceda il numero massimo  $m(k)$  di veicoli di tipo  $k$  disponibili. Diverse varianti del problema sono possibili in base al tipo di flotta di veicoli disponibili ed al tipo di costi considerati. Ad oggi, nessun algoritmo di tipo esatto è stato presentato per le diverse varianti sopra elencate. Per tale motivo, uno degli obiettivi principali di questo progetto è lo studio dell'HVRPTW al fine di sviluppare nuove formulazioni matematiche e nuovi metodi esatti ed euristici per la sua risoluzione. In particolare, si vuole investigare l'utilizzo di formulazioni di tipo two-commodity, utilizzate dal gruppo proponente questo progetto di ricerca ed impiegate per risolvere in modo esatto il CVRP (si veda Baldacci, Hajiconstantinou e Mingozzi, 2004). Si ritiene che questo tipo di formulazione possa essere applicata anche all'HVRPTW. In questo ambito si intendono sviluppare metodologie di tipo poliedrale con cui rafforzare il rilassamento lineare della formulazione two-commodity al fine di realizzare algoritmi di tipo branch-and-cut per la risoluzione esatta del problema.

Sarà inoltre analizzato il problema noto come "Multi-Trip VRP with Time Windows" (MTVRPTW) che costituisce la variante del VRP in cui ogni veicolo può effettuare più di un viaggio durante il periodo temporale considerato, con i vincoli che la somma dei tempi di percorrenza dei viaggi eseguiti da ciascun veicolo non superi una durata massima prefissata e che ogni cliente sia visitato da uno ed un solo veicolo durante la sua finestra temporale. Anche per tale problema sono noti unicamente algoritmi di tipo euristico (si veda [Brandao e Mercer, 1998] e [Olivera e Viera, 2007]). Si propone pertanto la definizione di algoritmi di tipo esatto basati su approcci Branch and Cut e Branch and Price, approcci che appaiono particolarmente adatti per tale tipologia di problemi. Saranno inoltre analizzate varianti del problema che nascono in applicazioni reali quali quelle legate al trasporto di tipologie di merci di diverse categorie.

Le ricerche sui problemi HVRPTW e MTVRPTW saranno svolte in collaborazione con le altre unità di ricerca ed, in particolare, con le unità di ricerca del Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, del DTI, Università degli Studi di Milano.

Saranno anche considerati algoritmi di ricerca locale basati sulla soluzione di un modello di Programmazione Lineare Intera per l'Open VRP (OVRP) e per altre varianti del CVRP.

Per quanto riguarda i problemi di impaccamento, verranno considerati il 2DBPP ed il 2CBP. Per tali problemi verranno studiati algoritmi approssimati strutturati in tre fasi: una prima fase in cui viene risolto il rilassamento continuo della formulazione di tipo Set Covering del problema, tramite generazione di colonne e soluzione del corrispondente sottoproblema di 2DKP o 2CKP; una seconda fase in cui la soluzione frazionaria ottenuta nella prima fase viene arrotondata ad una soluzione intera non necessariamente ammissibile, corrispondente all'impaccamento di un sottoinsieme degli oggetti; ed una terza fase in cui gli oggetti rimanenti (non impaccati alla fine della seconda fase) vengono impaccati in bin aggiuntivi. Si noti che, mentre nel caso del 2CBP è noto uno schema di approssimazione polinomiale per risolvere il rilassamento continuo nella prima fase, l'esistenza di un tale schema per il 2DBPP risulta essere un problema aperto, che verrà considerato nello studio corrente.

Le ricerche sui problemi di 2DBPP e 2DKP o 2CKP saranno svolte in collaborazione con l'unità di ricerca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Per quel che riguarda invece gli aspetti legati all'impatto dei tempi di movimentazione sul percorso, sarà considerata una nuova famiglia di problemi, definiti "VRP with Handling". Si tratta di problemi in cui presso i clienti sono previsti sia il carico che lo scarico di merce ed in cui si deve considerare il tempo necessario per il riordino a bordo del carico. Di tali problemi sono state studiate solo alcune varianti in cui l'impatto dell'handling era limitato dall'adozione di politiche rigide di gestione dei carichi e scarichi (quali il VRP with LIFO constraint). Si intende mettere a punto modelli matematici ed approcci esatti sia per il caso con singolo veicolo, TSP with Handling, sia per il caso multi veicolo VRP with Handling.

Verranno anche considerati algoritmi esatti ed euristici per la soluzione del "Set Covering Problem" (SCP) e del "Vertex Coloring Problem" (VCP) con vincoli aggiuntivi. Tali generalizzazioni dei classici SCP e VCP rivestono notevole importanza nella soluzione esatta ed euristica dei problemi considerati in precedenza.

Lo studio dei problemi sopraelencati prevede inoltre la collaborazione con l'unità di ricerca del Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova, per quanto riguarda le tecniche di risoluzione dei diversi modelli proposti.

La sperimentazione degli algoritmi sarà effettuata sia su istanze test derivate dalla letteratura sia su istanze reali provenienti da applicazioni pratiche.

La ricerca si articolerà attraverso le seguenti fasi:

- 1) IMPOSTAZIONE DEI PROBLEMI E DEFINIZIONE DELLE METODOLOGIE DA UTILIZZARE (durata, circa 6 mesi)
  - 1.1 Definizione dei problemi allo studio ed individuazione dei principali vincoli operativi caratterizzanti le applicazioni reali.
  - 1.2 Individuazione di sottoproblemi ben strutturati e messa a punto della scomposizione dei problemi.
  - 1.3 Definizione di massima degli approcci da adottare nella risoluzione di ciascun specifico problema e sottoproblema trattato.
- 2) PROGETTAZIONE DI MODELLI ED ALGORITMI (durata, circa 12 mesi)
  - 2.1 Formulazione di modelli matematici di teoria dei grafi e di programmazione lineare intera dei problemi considerati.
  - 2.2 Definizione dettagliata degli schemi di decomposizione e delle tecniche di rilassamento.
  - 2.3 Progettazione degli specifici algoritmi risolutivi ed implementazione dei relativi codici di calcolo.

---

<b>Sede dell'Unità</b>	Università degli Studi di BOLOGNA
<b>Responsabile Scientifico</b>	Aristide MINGOZZI
<b>Finanziamento assegnato</b>	Euro 7.620

## **Compito dell'Unità (come da progetto presentato)**

L'obiettivo di questo progetto di ricerca è lo sviluppo di nuovi metodi esatti ed euristici per tre importanti problemi nelle aree dei problemi di Vehicle Routing e Packing che modellano rilevanti applicazioni reali. Nell'area del Vehicle Routing si intende sviluppare algoritmi esatti per lo Split Delivery VRP (SDVRP), il Multi Trip VRP (MTVRP) e il Two Echelon VRP (2E-VRP). Nonostante il loro rilevante interesse applicativo, nella letteratura scientifica non sono stati finora proposti metodi esatti di soluzione. Una delle principali difficoltà è che questi tre problemi violano le assunzioni base del classico problema del VRP che sono: (i) ciascun cliente deve essere servito da un solo veicolo, (ii) ciascun veicolo esegue al più una route, (iii) tutte le routes partono e finiscono al deposito centrale dove sono localizzati tutti i veicoli. Tutte le diverse varianti del VRP fin ora considerate in letteratura, come il VRP con time windows, il VRP con vincoli di pickup e delivery, etc., soddisfano le tre assunzioni base suddette e, conseguentemente, i metodi esatti proposti per tali problemi sono estensioni (non banali) dei metodi esatti proposti per il VRP classico che considerano i vincoli addizionali di ogni specifica variante. I problemi di routing che non soddisfano le assunzioni base del VRP, come i problemi oggetto di questa ricerca, non possono essere risolti adattando i metodi esatti del VRP. Questi problemi richiedono nuove formulazioni matematiche e lo sviluppo di nuovi metodi esatti. In seguito descriviamo i tre problemi di routing che verranno considerati nel progetto di ricerca e le loro principali differenze rispetto al VRP che motivano le attività di ricerca per disegnare e sviluppare nuovi metodi esatti di soluzione.

### **a) Split Delivery Vehicle Routing Problem (SDVRP)**

Lo Split Delivery Vehicle Routing Problem (SDVRP) è un rilassamento del classico Vehicle Routing Problem dove uno stesso cliente può essere servito da veicoli diversi se questo riduce il costo totale della soluzione. Questo rilassamento diviene molto importante quando le quantità richieste da alcuni clienti eccedono la capacità del veicolo. Lo SDVRP può essere formulato in modi diversi ma, a differenza di molti altri problemi di Vehicle Routing studiati in letteratura, non può essere modellato come un problema di tipo Set Partitioning (SP) perché in questo caso una singola route può visitare un sottoinsieme di clienti le cui domande eccedono la capacità del veicolo. In questo caso la quantità consegnata da una route ad ogni cliente visitato è una variabile e non può pertanto essere fissata a priori. Una formulazione nota per lo SDVRP, proposta da Belenguer et al. (2000), è un'estensione della formulazione a due indici del VRP, mentre una diversa formulazione è basata sul SP, ma richiede di generare per ogni route tutte le possibili configurazioni di carico. Tale formulazione non può essere risolta direttamente, ma può essere rilassata per derivare validi lower bounds al problema. La risoluzione del problema rilassato derivante da questa seconda formulazione, mediante column generation, è comunque onerosa dal punto di vista del tempo calcolo, anche per problemi di medie dimensioni. Non è noto come i lower bounds possano essere implementati all'interno di algoritmi esatti. Proponiamo di estendere al SDVRP la formulazione two-commodity network flow usata in Baldacci et al. (2004) per il VRP. Questa formulazione appare promettente per i seguenti motivi: (i) richiede un numero polinomiale di variabili e vincoli; (ii) permette di modellare lo split delle domande dei clienti tra routes diverse; (iii) può essere rafforzata usando le valid inequalities utilizzate da Belenguer et al. (2000). Il nostro obiettivo è quello di sviluppare una procedura per il calcolo di un lower bound, usando il rilassamento lineare di questa formulazione, che possa essere alternata al calcolo di altri lower bounds derivati dalle altre formulazioni citate, in modo da ridurre il numero di variabili e poter risolvere il risultante problema ridotto con un algoritmo branch-and-cut. Intendiamo sperimentare gli algoritmi sviluppati su istanze proposte in letteratura.

### **b) Multi Trip Vehicle Routing Problem (MTVRP)**

Nella maggior parte dei modelli studiati per il Vehicle Routing Problem (VRP) e delle sue molte varianti, tutti i veicoli sono identici e ad ogni veicolo è consentito di effettuare al più una route. In molti contesti questa assunzione è irrealistica, come, per esempio, nel caso in cui la pianificazione considera un orizzonte temporale piuttosto ampio rispetto alla durata delle routes e ad alcuni veicoli è consentito di effettuare più routes. Il Multiple Trips Vehicle Routing Problem (MTVRP) è un'estensione del VRP dove una flotta di  $m$  veicoli identici di capacità  $Q$  e tempo di servizio  $T$  deve servire un insieme di clienti. Ogni veicolo può effettuare un sottoinsieme di routes, detto "schedula" durante il proprio periodo di servizio. Il MTVRP richiede di definire al più  $m$  schedule di costo minimo per i veicoli, tali che ogni cliente sia visitato esattamente una volta. Intendiamo investigare due formulazioni di tipo set-partitioning del MTVRP. La prima formulazione tratta ogni veicolo individualmente e richiede la generazione a priori di tutte le routes ammissibili e di un vincolo per ogni veicolo che definisce l'ammissibilità della schedula a lui assegnata. La seconda formulazione è basata sulla generazione di tutte le schedule ammissibili. Il rilassamento lineare di entrambe le formulazioni può essere rafforzato aggiungendo valid inequalities allo scopo di calcolare validi lower bounds per il MTVRP. Intendiamo investigare inequalities specifiche per tali formulazioni allo scopo di sviluppare procedure di bounding basate su tecniche column-and-cut generation. Inoltre, intendiamo implementare tali lower bounds all'interno di un algoritmo branch-and-cut allo scopo di trovare soluzioni ottime del MTVRP.

### **c) Two Echelon Vehicle Routing Problem (2E-VRP)**

Il Two Echelon Vehicle Routing Problem (2E-VRP) modella un sistema di distribuzione dove le consegne da un deposito centrale ai clienti sono effettuate utilizzando depositi intermedi, detti satelliti, mediante una distribuzione a due livelli. Il primo livello consiste in routes che iniziano e terminano al deposito centrale e consegnano ad un sottoinsieme di satelliti le quantità richieste dai clienti. Il secondo livello consiste in routes, ognuna che parte e termina ad uno stesso satellite, per servire i clienti. Ad ogni livello viene utilizzata una flotta omogenea di veicoli. I veicoli del primo livello sono ubicati al deposito centrale e vengono usati solo per rifornire i satelliti. I veicoli di secondo livello hanno una capacità più piccola rispetto a quelli del primo livello e vengono usati solo per servire i clienti dai satelliti. L'obiettivo è quello di servire ogni cliente esattamente una volta con le routes di secondo livello, minimizzando il costo totale. Il 2E-VRP trova applicazione in diverse aree della distribuzione come i servizi di corriere espresso, la distribuzione a supermercati e alimentari, i servizi di e-commerce e home-delivery e la distribuzione di quotidiani. Oltre ad essere interessante dal punto di vista applicativo, il 2E-VRP è anche un interessante problema di ottimizzazione combinatoria per diversi motivi. A nostra conoscenza non sono stati presentati algoritmi esatti in letteratura per il 2E-VRP, ma solo metodi euristici per specifiche applicazioni di tale problema nell'ambito della gestione della supply chain. Né le formulazioni né i metodi esatti proposti per il VRP e le sue varianti possono essere estesi al 2E-VRP. Proponiamo di studiare formulazioni matematiche appropriate e rilassamenti del 2E-VRP allo scopo di derivare sia lower bounds sia metodi di soluzione esatti.

Per quanto riguarda i problemi di Packing, la nostra Unità di Ricerca propone di sviluppare algoritmi esatti ed euristici per il Two-Dimensional Strip Packing (2SP), il Variable Size Bin Packing monodimensionale e bidimensionale (1VSBP and 2VSBP) e il Two-Constraint Bin-Packing (2CBP). Questi problemi di packing sono profondamente correlati a problemi di caricamento riscontrabili nei sistemi di trasporto.

In questo progetto di ricerca intendiamo sviluppare nuovi lower e upper bounds e nuovi metodi esatti, partendo dai risultati ottenuti dal nostro gruppo di ricerca per il Bin Packing bi e tridimensionale (2BP and 3BP) e per il Non-Guillotine Cutting bidimensionale (NGCP). Le metodologie proposte faranno uso delle dual feasible functions, cutting planes, etc. Gli algoritmi sviluppati in questo progetto saranno valutati computazionalmente su problemi test disponibili in letteratura.

I problemi di packing considerati in questa ricerca sono riassunti qui di seguito.

### **a) Two-Dimensional Strip Packing (2SP)**

Il Two-Dimensional Strip Packing Problem (2SP) è riscontrabile in diversi settori applicativi e consiste nel taglio di una superficie master rettangolare, chiamata strip, di larghezza data e altezza infinita, in un certo numero di pezzi rettangolari di dimensioni date. I pezzi devono essere tagliati sempre con i bordi ortogonali o paralleli ai bordi della strip (orthogonal cuts) e assumendo che i pezzi abbiano un orientamento prefissato e non possano essere ruotati. L'obiettivo è tagliare tutti i pezzi dati minimizzando l'altezza della strip impiegata. Per esempio, problemi di 2SP si possono riscontrare nell'industria metalmeccanica o della carta, dove rotoli di materiale devono essere tagliati in rettangoli più piccoli, o nell'ambito dei trasporti, dove la lunghezza del piano di carico utilizzato deve essere minimizzata. Nella nostra ricerca proponiamo di sviluppare nuove procedure di riduzione, lower e upper bounds e algoritmi esatti per il 2SP. Nuovi lower bounds possono essere derivati da considerazioni geometriche o da differenti rilassamenti di diverse formulazioni matematiche del 2SP. Inoltre, nuovi upper bounds possono essere derivati dai lower bounds e dai metodi esatti. I nuovi metodi esatti saranno basati su approcci branch-and-bound.

### **b) Variable Size Bin Packing monodimensionale e bidimensionale (1VSBP and 2VSBP)**

Il Variable Size Bin Packing (VSBP) consiste nell'allocare un insieme di pezzi in un insieme di contenitori, chiamati bins, di diverse dimensioni. L'obiettivo può essere la minimizzazione del costo complessivo dei bins usati o l'area complessivamente non utilizzata nei bin impiegati, etc. Questo problema può trovare molte applicazioni pratiche e può essere usato per derivare validi lower bounds o disuguaglianze valide per il VRP.

La nostra unità di ricerca propone di investigare differenti formulazioni matematiche e di sviluppare sia algoritmi esatti che euristici. Il cuore della ricerca è lo studio di nuove procedure di bounding per il VSBP derivate da considerazioni geometriche e da differenti rilassamenti dei modelli proposti. Il gruppo di ricerca intende anche investigare nuove disuguaglianze valide per migliorare il bound fornito dal rilassamento lineare delle formulazioni matematiche proposte da usare in un algoritmo di tipo branch and cut.

### **c) Two-Constraint Bin Packing (2CBP)**

Il Two-Constraint Bin Packing (2CBP) consiste nell'allocare un insieme di pezzi, ognuno dei quali è caratterizzato da due differenti pesi, in un insieme di bins di eguali caratteristiche per i quali sono specificate le capacità per ciascuno dei pesi considerati. L'obiettivo è minimizzare il numero dei bins utilizzati rispettando entrambe i vincoli di capacità. Il 2CBP è una generalizzazione del Bin Packing monodimensionale (1BP) ed è anche conosciuto come Two-Dimensional Vector Packing.

Una tipica applicazione del 2CBP è il caricamento di merci di piccola dimensione in containers, dove ogni merce ha un peso e un volume associato e ogni container ha una capacità, sia in termini di peso che di volume. In questa situazione non è richiesto di definire il layout tridimensionale della soluzione, ma è richiesto di soddisfare entrambe i vincoli di capacità.

In questo progetto proponiamo di estendere al 2CBP alcuni degli approcci sviluppati dalla nostra unità di ricerca per il VSBP.

<b>Sede dell'Unità</b>	Università della CALABRIA
<b>Responsabile Scientifico</b>	Roberto MUSMANNO
<b>Finanziamento assegnato</b>	Euro 9.601

## **Compito dell'Unità (come da progetto presentato)**

L'attività di ricerca che verrà svolta dall'Unità Operativa si articolerà secondo le seguenti fasi:

- definizione del modello SWCP;
- definizione del costo atteso di ricorso in una forma chiusa trattabile;
- definizione di un algoritmo euristico di soluzione;
- esperimenti computazionali;
- validazione del modello su un caso reale;
- diffusione dei risultati.

### Definizione del modello di SWCP

Nel corso della prima fase, verrà definito il modello stocastico del problema di instradamento su spigoli con vincoli di capacità (CARP), nella sua variante utilizzabile per progettare le rotte dei veicoli assegnati alla raccolta di rifiuti solidi urbani (SWCP).

Il modello SWCP dovrà tener conto di due importanti aspetti non presenti nella formulazione classica del CARP: (i) i rifiuti devono essere scaricati presso un sito, che nella quasi totalità dei casi non corrisponde al nodo deposito dei veicoli assegnati alle operazioni di raccolta; (ii) le quantità di rifiuti da raccogliere sono intrinsecamente variabili casuali piuttosto che valori deterministici.

Non è pertanto possibile assumere, come nel caso del classico CARP o delle sue varianti tradizionali, che i veicoli assegnati alle operazioni di raccolta possano sempre seguire le rotte per come sono state preventivamente pianificate. Un fallimento può verificarsi su una rotta pianificata se, in qualche punto della rotta percorsa, la quantità di rifiuti non può essere prelevata perché si supera la capacità del veicolo.

L'idea alla base del modello che si vuole provare a studiare in questa fase del progetto è basata sul paradigma della Programmazione Stocastica con Ricorso (SPR). Il modello previsto sarà quindi a due stadi. Nella prima fase, saranno pianificate le rotte dei veicoli. Nella seconda fase, quando saranno note le realizzazioni della variabili aleatorie della domanda di rifiuti sui singoli spigoli di servizio, potranno essere definite le azioni di ricorso in modo tale da assicurare comunque la raccolta dei rifiuti lungo tutti i restanti spigoli di servizio in caso di fallimento.

Più formalmente, il modello SWCP consiste nel progettare la soluzione di primo stadio (insieme di  $m$  rotte pianificate) che minimizzi il costo atteso del secondo stadio.

### Definizione del costo atteso di ricorso in una forma chiusa trattabile

In questa fase del progetto si affronterà il problema della determinazione del costo atteso di ricorso, componente fondamentale, per come illustrato in precedenza, per il paradigma SPR che si intende proporre nella prima fase. In generale, esso può essere determinato in modo approssimato utilizzando ad esempio una tecnica di simulazione tipo Monte Carlo. L'obiettivo del progetto è tuttavia più ambizioso, ovvero trovare una forma chiusa trattabile di tale componente di costo, che sia pertanto computazionalmente determinabile in modo esatto.

Per far ciò si può considerare il caso in cui la variabile aleatoria corrispondente alla domanda di rifiuti su uno spigolo di servizio sia continua, così come il caso discreto.

Questo secondo caso servirà per modellizzare le situazioni in cui si immagina che la quantità di rifiuti su uno spigolo di servizio sia definita come numero di contenitori o addirittura come numero di sacchetti di plastica.

### Definizione di un algoritmo euristico di soluzione

In questa fase di progetto, si proporrà un algoritmo euristico per la soluzione del modello di SWCP.

Sebbene diverse euristiche possano essere definite, si può comunque già in fase di descrizione del progetto provare ad orientare la scelta verso innovativi approcci di ricerca locale, come, ad esempio, l'ALNS (Adaptive Large Neighborhood Search), introdotto da Ropke e Pisinger (2006).

ALNS è un metodo iterativo di ricerca locale nel quale, ad ogni iterazione, più algoritmi semplici competono per modificare la soluzione corrente. Un algoritmo viene scelto per "distruggere" la soluzione corrente, mentre un secondo è scelto per "riparare" la soluzione. La nuova soluzione così "riparata" viene accettata come nuova soluzione corrente se essa soddisfa un criterio di miglioramento definito dal paradigma di ricerca locale.

### Esperimenti computazionali

In questa fase si prevede di testare l'algoritmo sviluppato nella precedente fase, utilizzando problemi test presenti in letteratura. Le istanze campione possono essere ottenute modificando opportunamente quelle utilizzate per il CARP; in particolare si possono considerare:

- ° i valori di domanda (deterministici) come i valori attesi di variabili aleatorie con funzione di probabilità nota;
- ° il deposito e la discarica localizzati nello stesso vertice.

Per molte istanze del CARP sono note le soluzioni ottime. Con le suddette modifiche, per tali istanze si può ri-calcolare il valore della funzione obiettivo secondo il modello stocastico (valore atteso). Tale valore sarà confrontato con quello ottenuto mediante l'algoritmo euristico messo a punto nella fase precedente. Nel caso in cui i risultati computazionali non dovessero essere ritenuti soddisfacenti, il progetto prevede la possibilità di ridefinire l'euristica di soluzione proposta nella fase precedente, attraverso l'adozione di approcci metaeuristici diversi e strategie di esplorazione dello spazio delle soluzioni avanzate; tali approcci saranno messi a punto e testati nell'ambito del progetto da altre Unità di Ricerca (per problemi di diversa tipologia). Il riferimento è, ad esempio, alle tecniche "evolutive" che saranno sviluppate dall'Unità di Ricerca presso l'Università di Bologna per problemi di node routing.

Allo stesso modo, l'Unità di Ricerca presso l'Università di Bologna potrebbe testare l'approccio ALNS sperimentato nell'ambito dei problemi di arc routing su problemi di node routing, mediante opportune modifiche.

Nel corso del programma, si valuterà la possibilità di trasformare e risolvere SWCP come modello di node routing (con l'obiettivo di sfruttare direttamente i contributi delle altre Unità di Ricerca).

### Validazione del modello su un caso reale

Tale fase del progetto prevede l'utilizzo del modello su una istanza reale, con l'obiettivo di mostrare come i risultati di una attività di ricerca che si configura di base, con forti contributi innovativi dal punto di vista teorico e computazionale, possano comunque avere una ricaduta applicativa immediata. Allo scopo, si prevede di sfruttare dati, già disponibili presso l'Unità di Ricerca e provenienti da un bacino di raccolta di rifiuti in provincia di Lecce.

In questo caso la soluzione algoritmica proposta a valle del progetto potrà essere confrontata direttamente con la soluzione adottata nella pratica dall'azienda che effettua il servizio di raccolta di rifiuti nel territorio su indicato.

### Diffusione dei risultati

Se i risultati del progetto saranno in linea con le previsioni, ovvero, non solo innovativi, ma anche interessanti dal punto di vista scientifico e applicativo, si prevede che saranno oggetto di almeno una pubblicazione scientifica su rivista internazionale ISI, nonché di almeno due presentazioni a convegni nazionali e/o internazionali del settore della Ricerca Operativa.

Tali risultati potranno essere utilizzati per "misurare" l'attività di ricerca proposta.

E' il caso di evidenziare che le suddette attività saranno condotte in collaborazione con il "Centre Interuniversitaire de Recherche sur les Réseaux d'Entreprise, la Logistique et le Transport" (CIRELIT) dell'Université de Montréal, Canada. Inoltre, si lavorerà in stretta collaborazione con l'Unità di Ricerca dell'Università di Milano, nell'ottica di estendere la metodologia adottata ad altre linee di ricerca previste dal programma e/o integrare i risultati. Il riferimento è soprattutto ai due problemi seguenti:

- ° problemi con vincoli di handling del carico (nel caso di trasporto di rifiuti differenziati);
- ° problemi di Ottimizzazione in emergenza (impiego di tecniche di Ottimizzazione Stocastica).

<b>Sede dell'Unità</b>	Università degli Studi di MILANO
<b>Responsabile Scientifico</b>	Giovanni RIGHINI
<b>Finanziamento assegnato</b>	Euro 9.905

## **Compito dell'Unità (come da progetto presentato)**

Nell'ambito del progetto relativo all'ottimizzazione logistica e dei trasporti, l'unità di ricerca dell'Università degli Studi di Milano intende in particolare sviluppare algoritmi di column generation per risolvere in modo esatto o approssimato problemi di routing desunti da applicazioni reali nel settore della logistica.

### (1) Problemi di vehicle routing con finestre temporali

In particolare verranno studiati algoritmi di ottimizzazione esatti per le versioni con finestre temporali dei problemi di vehicle routing eterogeneo, vehicle routing multi-deposito, vehicle routing multi-trip e vehicle routing generalizzato, in sinergia con le unità di ricerca di Bologna e di Cesena, che svilupperanno algoritmi per le varianti senza finestre temporali. Un approccio complementare allo stesso problema con e senza finestre temporali è dovuto al fatto che le tecniche basate su piani di taglio, come si può desumere dalla letteratura, sono molto efficaci per i problemi senza finestre temporali ma non tengono conto facilmente di vincoli aggiuntivi come le finestre temporali. Al contrario gli algoritmi column generation, dove il sottoproblema di pricing è generalmente un problema di cammino minimo con vincoli di risorsa, possono facilmente incorporare tali vincoli. Tuttavia il tempo di calcolo dell'algoritmo di pricing, tipicamente un algoritmo di programmazione dinamica, risente fortemente di quanto i vincoli sono stringenti; pertanto istanze con finestre temporali più strette vengono risolte molto più facilmente di istanze con finestre temporali larghe e lo stesso vale per i vincoli di capacità, di precedenza o di altri tipi. E' quindi necessario sviluppare approcci alternativi per poter risolvere sia istanze con vincoli poco stringenti sia istanze con vincoli molto stringenti. Per questo motivo la ricerca sui problemi di VRP con finestre temporali verrà svolta con un frequente interscambio di informazioni e di codice di calcolo con le altre unità di ricerca, in particolare quelle di Bologna e di Cesena.

Verranno studiati anche i casi in cui le finestre temporali specificate dagli utenti, che devono ricevere il servizio di carico/scarico di merce, sono "soft", ossia non rappresentano veri e propri vincoli ma preferenze dal cui rispetto dipende la qualità del servizio logistico. Tale caratteristica consente di separare due indicatori di performance diversi: il costo sostenuto da chi eroga il servizio e il livello di servizio percepito da chi lo riceve. L'introduzione delle finestre temporali "soft" cambia radicalmente la natura combinatoria del problema rispetto al caso con finestre temporali "hard" e lo complica dal punto di vista algoritmico, richiedendo pertanto lo sviluppo di soluzioni ad hoc.

Oltre che con le unità di ricerca di Bologna e Cesena, la ricerca su questo argomento verrà svolta anche in collaborazione con partners presso l'Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (Svizzera), la University of Kent (Gran Bretagna) e la University of California at Berkeley (USA).

### (2) Problemi con vincoli di handling

In sinergia con l'unità di ricerca di Bologna, verranno sviluppati algoritmi esatti ed euristici per problemi in cui le operazioni di carico e quelle di scarico devono rispettare vincoli aggiuntivi sull'ordine della sequenza delle operazioni. Questo tipo di problemi si presentano frequentemente con veicoli caricabili solo dal retro o veicoli divisi in scomparti, ad esempio per il trasporto di rifiuti differenziati o di bestiame. Il programma di ricerca riguarda in particolare la soluzione di questo tipo di problemi nel caso di flotte con molti veicoli, poiché gli unici algoritmi finora proposti in letteratura riguardano i problemi con un solo veicolo. Il problema con vincoli sulle sequenze di carico e scarico è complementare a quello del VRP con costi di handling, che verrà affrontato dall'unità di ricerca di Bologna. In quel caso infatti si consente il riordino del carico a bordo del veicolo e si tiene conto del corrispondente costo (tempo) nella funzione obiettivo; in questo caso invece si considera l'esistenza di vincoli che rendono impossibile riordinare i carichi e richiedono pertanto al veicolo di seguire un percorso che può differire da quello ottimo, pur di rendere compatibili le sequenze delle operazioni di carico e di scarico. In particolare verrà considerata la variante del problema del TSP with Handling (TSPH) in cui un singolo veicolo è diviso in compartimenti, ciascuno dei quali è gestito con politica LIFO o FIFO. Verrà inoltre considerata l'estensione dal caso con un singolo veicolo al caso con più veicoli (VRPH), che verrà affrontata con lo sviluppo di un algoritmo branch-and-price. Ciò richiede a sua volta la progettazione di appositi algoritmi di pricing per il problema di cammino minimo con vincoli di risorsa e di sequenza. Per la complementarietà dei problemi considerati la ricerca su questo argomento verrà eseguita in stretta collaborazione con l'unità di ricerca di Bologna, oltre che con l'Università di Madrid.

### (3) Problemi di logistica urbana

Il problema di ottimizzare la distribuzione delle merci nei centri abitati e in particolare nei centri storici è di estrema importanza per molte città italiane a causa della loro struttura viaria.

Nei problemi di logistica urbana si vuole realizzare una rete di distribuzione a due livelli (Two-echelon VRP). A questo scopo si vuole realizzare un algoritmo di column generation a due livelli, tenendo conto del fatto che al livello superiore può essere consentito lo split dei carichi su diversi depositi-satellite e che al livello inferiore si ha un multi-depot VRP con finestre temporali, che possono essere hard nel caso di vincoli di legge sul traffico urbano o soft nel caso di contratti sul livello di servizio sulla fornitura della merce. La ricerca su questo argomento verrà eseguita in stretta collaborazione con l'unità di Cesena.

### (4) Problemi di ottimizzazione in emergenza

Si intende affrontare in particolare il problema di ottimizzare la distribuzione di vaccini ed antivirali alla popolazione urbana ed extra-urbana in caso di pandemia. In tale tipo di applicazione è di cruciale importanza il tempo massimo necessario per raggiungere tutta la popolazione nonché la robustezza del piano di distribuzione che deve prevedere ritorni in punti nei quali la consegna non è stata possibile in prima istanza. La ricerca su questo argomento, che richiede l'impiego di tecniche di Programmazione Stocastica, verrà svolta in collaborazione con l'unità di ricerca dell'Università della Calabria e con la University of Southern California (USA).

Tutti i problemi sopra elencati verranno affrontati facendo uso di tecniche di riformulazione nonché perseguendo l'integrazione tra le tecniche algoritmiche della programmazione matematica e quelle della programmazione a vincoli. A questo scopo verranno opportunamente valorizzati i risultati conseguiti dall'unità di ricerca di Padova.

Per tutti i punti sopra indicati il programma di ricerca prevede una prima fase di aggiornamento bibliografico e di definizione dei benchmarks sui cui condurre gli esperimenti computazionali. Poiché quasi tutti i problemi considerati verranno studiati in collaborazione con le altre unità di ricerca, la definizione dei benchmarks avverrà in comune, al fine di rendere confrontabili i risultati ottenibili con i diversi algoritmi sulle diverse varianti degli stessi problemi. I benchmarks verranno scelti in modo da comprendere sia istanze note in letteratura scientifica, per consentire il confronto con risultati precedenti, sia istanze tratte da casi reali, per consentire l'integrazione con sistemi informativi geografici. La fase successiva riguarderà la realizzazione di prototipi degli algoritmi e quindi il necessario tuning dei loro parametri.

In parallelo alle attività sopra descritte verrà eseguita la preparazione dei dati tramite estrazione del grafo stradale da sistema informativo geografico e la realizzazione di procedure di interfaccia tra i dati in formato GIS (shapefile) e le strutture-dati usate dagli algoritmi di ottimizzazione (grafo pesato).

<b>Sede dell'Unità</b>	Università degli Studi di PADOVA
<b>Responsabile Scientifico</b>	Michelangelo CONFORTI
<b>Finanziamento assegnato</b>	Euro 10.776

## **Compito dell'Unità (come da progetto presentato)**

La ricerca proposta ha lo scopo di fornire risultati teorici e strumenti computazionali per estendere l'applicazione pratica delle tecniche MIP alla soluzione di problemi reali (in particolare problemi di instradamento e di caricamento di veicoli) e per migliorare la qualità dei bound, utili nello sviluppo di altri approcci risolutivi. Ci concentreremo su tecniche enumerative (in particolare branch-and-cut) e seguiremo tre direzioni complementari: la ricerca di nuove famiglie di tagli "general purpose", il rafforzamento dei modelli MIP attraverso tecniche di riformulazione e l'integrazione di tecniche CP per migliorare le componenti degli approcci MIP basati su enumerazione. In generale, l'Unità di Ricerca prevede le seguenti fasi:

- ricognizione della letteratura, per approfondire lo stato dell'arte nelle tre direzioni;
- estensione dei risultati nelle linee di ricerca recentemente emerse o proponendo nuove linee;
- studio dell'integrazione dei risultati ottenuti nelle componenti dei risolutori MIP;
- validazione computazionale delle tecniche proposte, attraverso test su problemi di ottimizzazione di rilevanza applicativa, con particolare riferimento a problemi di instradamento e caricamento nella gestione dei sistemi di trasporto, selezionati in collaborazione con le altre Unità di Ricerca;
- applicazione dei risultati per la modellazione, la ricerca di bound e la soluzione di problemi o sotto-problemi selezionati in collaborazione con le altre Unità di Ricerca;
- diffusione dei risultati.

Di seguito, diamo un programma dettagliato per le tre linee di ricerca.

### **NUOVE FAMIGLIE DI PIANI DI TAGLIO**

Siamo interessati a definire piani di taglio "general purpose" da integrare in approcci branch-and-cut per MIP.

Si intende studiare la possibilità di ottenere tagli utilizzando la definizione del corner polyhedron, a partire dal rilassamento proposto da Andersen, Louveaux, Weismantel e Wolsey 2007 per il caso che considera due righe del tableau del semplice, e generalizzato da Borozan e Cornuéjols 2008. Tale generalizzazione corrisponde al rilassamento semi-infinito ed è un'astrazione del corner polyhedron, nella stessa direzione del Master Corner Polyhedron di Gomory e Johnson 2003, il cui vantaggio è l'indipendenza dai dati di una particolare istanza. Questo modello si presta quindi alla derivazione di formule per ottenere piani di taglio (i tagli Mixed-Integer di Gomory possono essere interpretati in questa chiave). Il rilassamento è ottenuto dal tableau del semplice con la rimozione dei vincoli di non-negatività delle variabili di base e di interezza delle variabili fuori base. Intendiamo studiare le proprietà teoriche del poliedro che risulta dall'intersezione dei corner polyhedra associati a tutte le basi ammissibili del rilassamento lineare.

Borozan and Cornuéjols 2008 dimostrano come le disuguaglianze valide per l'insieme misto-intero come sopra definito sono in corrispondenza biunivoca con insiemi convessi lattice-free massimali nello spazio delle variabili intere. Vogliamo studiare le proprietà di questi insiemi convessi a identificare classi di insiemi convessi lattice-free massimali che possano produrre tagli applicabili ad un approccio per piani di taglio.

Ulteriori analisi saranno rivolte all'integrazione dei risultati attesi come componenti di algoritmi branch-and-cut, per valutare l'utilità pratica delle corner relaxation, tema che rimane al momento un soggetto di ricerca quasi inesplorato. In particolare, siamo interessati a determinare i bound ottenibili ottimizzando sull'intersezione del corner polyhedron (definito dall'involuppo convesso dei punti ammissibili per la corner relaxation) e del poliedro del rilassamento lineare. L'analisi è volta all'identificazione di casi in cui tale bound domina i bound ottenibili aggiungendo al rilassamento lineare tutti i tagli Mixed-Integer di Gomory oppure tutti i k-cuts di Cornuéjols-Li-Vandenbussche o tutti i cosiddetti interpolated subadditive cuts, fornendo un'utile indicazione della portata pratica del rilassamento proposto.

Considereremo inoltre un'estensione dell'operazione di chiusura di Chvátal a insiemi misto-interi. In particolare, intendiamo scoprire casi per i quali tale operazione è sufficiente per ottenere l'involuppo convesso, permettendo di ottimizzare in tempi polinomiali sulla prima chiusura di Chvátal, anche se la soluzione della formulazione originale è NP-Hard (si noti che la ricerca di un punto appartenente alla prima chiusura di Chvátal di un poliedro è, in generale, NP-Hard). Conforti Di Summa Eisenbrand e Wolsey 2006 mostrano come trovare una soluzione misto-intera per vincoli totalmente unimodulari con al più due non-zero per colonna e termini noti con valori frazionari  $0$  o  $1/2$  è NP-Hard, mentre è possibile ottimizzare in tempo polinomiale considerando la prima chiusura di Chvátal di problemi in questa forma. Edmonds e Johnson 1973 e Gerards e Schrijver 1986 forniscono condizioni necessarie e sufficienti affinché la chiusura di Chvátal di particolari classi di insiemi interi definisca il relativo involuppo convesso. Intendiamo estendere questi risultati con la ricerca di condizioni necessarie e sufficienti più generali per matrici di insiemi misto-interi.

Un ulteriore studio sarà rivolto all'applicazione dei risultati attesi per migliorare gli approcci risolutivi messi a punto dalle altre Unità di Ricerca. L'analisi mira a identificare, nei modelli proposti, strutture o sottostrutture con proprietà particolari che le rendano adatte all'applicazione dei tagli studiati, con l'obiettivo di derivare migliori formulazioni e bound.

### **RIFORMULAZIONI DI MIP**

Vogliamo studiare la possibilità di ottenere buone formulazioni per problemi MIP attraverso riformulazioni che permettano di ottenere una descrizione o una buona approssimazione del loro involuppo convesso. Un metodo efficiente è quello di rappresentare la regione ammissibile attraverso un sistema lineare che utilizzi delle variabili aggiuntive. Otteniamo, in questi casi, una formulazione estesa, ossia un sistema di disuguaglianze che definiscono un poliedro un uno spazio con più dimensioni rispetto a quello originario e la cui proiezione è l'involuppo convesso dell'insieme misto-intero da studiare. Questo è possibile per problemi dotati di strutture particolari (si vedano le connessioni con la programmazione dinamica studiate da Martin Rardin e Campbell 1990 o per alcune particolari classi di MIP (Conforti, Di Summa, Eisenbrand e Wolsey 2006 e Conforti, Di Summa e Wolsey 2007).

Proponiamo di estendere tali risultati attraverso lo studio dell'involuppo convesso di questi particolari insiemi misto-interi nello spazio delle variabili originarie. Più precisamente, vogliamo analizzare la struttura del cono di proiezione per particolari topologie di grafo. In questo modo si potrebbe calcolare esplicitamente la proiezione del poliedro associato alla formulazione estesa.

Più in generale, siamo interessati a valutare l'applicabilità delle idee sopra delineate a classi più ampie di problemi. Ad esempio, possiamo esprimere le variabili continue in termini di alcune variabili intere aggiuntive, che ne rappresentino i possibili valori frazionari, e quindi rafforzare la nuova formulazione con piani di taglio generici o "ad-hoc". Dal momento che i piani di taglio "general purpose" tendono ad avere coefficienti "deboli" sulle variabili continue, la tecnica proposta potrebbe portare dei benefici computazionali nelle istanze per le quali sia disponibile una descrizione compatta delle possibili frazionalità. In generale, l'idea di base è ottenere delle formulazioni estese la cui struttura e le cui proprietà permettano la generazione di tagli, allo scopo di meglio approssimare l'involuppo convesso della regione ammissibile sia nello spazio esteso, sia nello spazio originario.

Le tecniche studiate saranno testate su diverse classi di problemi, allo scopo di misurare l'utilità pratica delle formulazioni estese.

Anche per questa linea di ricerca, si vuole analizzare l'applicabilità dei risultati attesi ad una selezione di modelli sviluppati dalle Unità di Ricerca per problemi di gestione dei sistemi di trasporto. Si procederà con l'individuazione di sottosistemi di disuguaglianze nelle classi citate e con la loro proiezione in uno spazio a dimensioni aggiuntive, ottenendo una formulazione estesa del problema originario e misurando i miglioramenti ottenibili in termini di speed-up computazionale, convergenza degli algoritmi e qualità dei bound.

### **INTEGRAZIONE DI MIP E CP**

Proponiamo la ricerca di possibili integrazioni tra MIP e CP intesa come la valutazione dell'efficacia di concetti e di tecniche sviluppate per un paradigma quando sono incorporate nell'altro. Vista la complementarità dei due approcci, è evidente il potenziale di tale integrazione. Più specificamente, si vuole studiare l'applicazione in ambito MIP di tecniche avanzate di ricerca nello spazio delle soluzioni ammissibili sviluppate in contesto CP.

In particolare, intendiamo analizzare strategie computazionali quali restart, randomization e constraint-directed search, in grado di rompere la rigidità dello schema ad albero (tipico di approcci branch-and-cut) e che sono meno sensibili agli errori commessi nelle fasi iniziali. Inoltre, si prevede di studiare l'applicazione di tecniche CP in altre fasi del processo di soluzione, ad esempio nella messa a punto di euristiche primali e strategie di branching. Dal punto di vista duale, si vuole studiare l'uso dei rilassamenti tipici della programmazione matematica (in particolare i rilassamenti lineare e lagrangiano) in un contesto CP, e l'inclusione del ragionamento basato sull'ottimalità nella propagazione dei vincoli (cost-based-filtering).

Si intende inoltre ricercare e valutare sperimentalmente nuovi metodi algoritmici per i paradigmi Constraint Integer Programming e search-infer-and-relax, recentemente proposti. I due paradigmi costituiscono un quadro di modellazione molto generale, anche se la loro implementazione è ancora nelle fasi preliminari,



aprendo molte possibilità a miglioramenti algoritmici.

Un ambito ideale per la sperimentazione delle tecniche proposte è costituito da problemi da selezionare in collaborazione con le altre Unità di Ricerca. In effetti, i problemi di instradamento, caricamento e packing nella gestione dei sistemi di trasporto sono in generale molto difficilmente risolvibili con approcci MIP standard e la presenza di numerosi vincoli aggiuntivi li rende un interessante banco di prova per misurare i miglioramenti ottenibili con l'integrazione di tecniche CP.

Le ricerche teoriche e applicative sopra proposte si inquadrano in alcune delle linee più promettenti in ambito MIP, a sono attesi interessanti risultati, dal punto di vista sia puramente scientifico, sia applicativo. Intendiamo sottoporre degli articoli scientifici per la pubblicazione su riviste e conferenze internazionali. Nel corso del progetto, sarà particolarmente utile diffondere i risultati emergenti presso le altre Unità di Ricerca, visto il loro potenziale impatto nella messa a punto di approcci alternativi alla modellazione, la ricerca di bound e la soluzione dei problemi che saranno via via formulati.

---